

中学2年4組 数学科学習指導案

指導者 後藤幸広

隣り合う2つの正三角形の証明から、交点Pに注目することによって生まれた数学的な「問い」をつなぎ、問題の条件（大きさや位置）を変えて追求し合ったことは、交点Pのもつ性質を見いだすことに有効であったか。

1 単元名 三角形の証明問題から発展的に追求しよう！ ～図形の性質と証明～

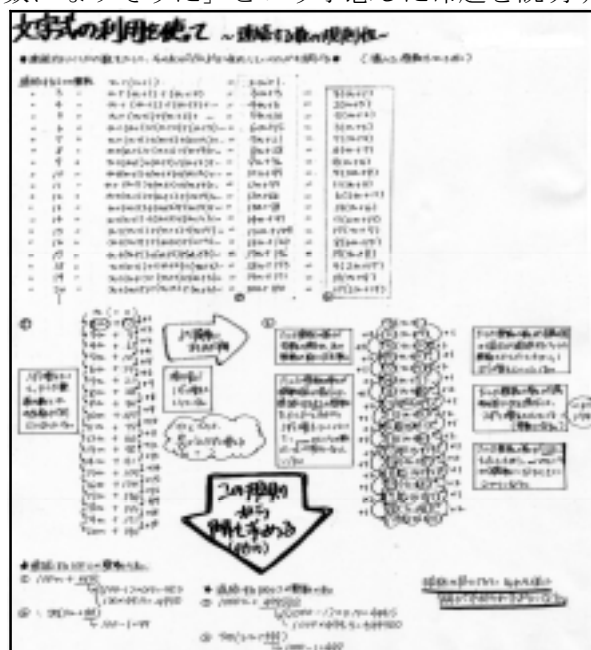
2 授業の構想

(1) 生徒たちは、2年生になり最初の学習単元として「式の計算」の学習に取り組んだ。その中の「文字式の利用」では、文字を用いた式で数量の関係をとらえ説明する学習を行った。そこで次のような授業場面があった。「連続する3つの偶数の和は、6の倍数になりそうだ」という予想した命題を説明する課題に取り組んだ際に、

nを自然数とすると、連続する3つの偶数は、 $2n$ 、 $2n+2$ 、 $2n+4$ と表され、それらの和は、 $6n+6$ となり、 $6(n+1)$ にできるから。

という説明を聞いていた生徒の中から、「他にもいえないようなことはないか。」という新たな問いが生まれた。そして「これは2の倍数でもいいんだ。なぜなら、 $6n+6$ は $2(3n+3)$ にできるから。」

「だったら3の倍数にもなる。同じように考えて $6n+6$ は $3(2n+2)$ になるから。」「それなら、連続する3つの偶数の和は、まん中の数を3倍したものになることもいえるよ。」といった気づきを学び合いの中から生み出すことができた。このように説明したことをふり返って新たな性質を見いだすことや、右記の



レポートのように問題の条件を変えて発展的に考え、追求していく力をさらに伸ばしていくことは、数学的な思考を深めていく上で非常に重要であり、このような生徒の姿こそ本学校園算数・数学科のめざす豊かな学びの姿であると考えます。

しかし、このように発展的に考え追求できる生徒がいる一方、文字式を用いて論理的に考え説明すること自体に抵抗を感じている生徒もいる。これまでも、授業の中で説明することを大切にしてきたが、全体的な生徒の実態として十分とはいえない。一人ひとりの生徒が、自分の考えをもち表現できること、つまり自分なりの言葉で説明する力を伸ばしていくことが基盤となり、文字を用いることの必要性やそのよさを実感でき、さらに視点を広げ発展的に追求していけるようにしていく必要がある。

このような実態をふまえ、本単元では「図形」の学習を通して、特にこれまで直観的、あるいは実験的に認めてきた図形の性質を論理的な推論を用いて考えることができるようになり、さらにその考えを学級全体の友だちに伝わるよう、わかりやすく表現することを意識させていきたい。その前段階としての、学習の中から生まれてきた「問い」に対して自分の考えをしっかりとつことができるようになる場、あるいはまわりの友だちとのかかわり合いから共に追求していく場などを大切にしながら、これらをもとに学級全体での学び合いを構想していきたい。

(2) 「図形」とは、身の回りにある様々なものを「形」、「大きさ」、「位置関係」という観点からとらえたものである。図形の学習は、小学校1年生の「いろいろなかたち」や「おおきさくらべ」といった

単元から始まる。その子どもたちにとって、図形についての表現や概念の基盤となるのが、いろいろな形の積み木を分類したり、いろいろなものに関わる際に「さんかく」「まる」「しかく」といった表現を使うなど、それまでの遊びや生活の中での体験である。初等部前期では、こうした幼稚園までのかたち（図形）に関わる知的体験をふまえ、算数科の接続をどのように行っていくのかを考えていくことが大切である。また算数科では「量と測定」、「図形」の2つの領域に分けて図形やその計量を扱っており、中等部ではこれらの関連を十分ふまえた上で、数学科における「図形」の学習への接続を図っていくことを大切にしていきたい。

そして中学校第1学年では、観察、操作や実験などの活動を通して、平面図形や空間図形について、算数科において養ってきた直観的な見方や考え方を深めることを中心としながら、論理的に考察し表現する能力を培っていく。それを受けて、第2学年では、平行線や角の性質、三角形の合同条件などを学習し、これらを基にして、いわゆる論証によって三角形や平行四辺形の基本的な性質を確かめられるようにしていく。これまで初等部前期や後期にかけて直観的にとらえてきた図形の性質を、論理的に筋道を立てて推論していくという、まさに数学的な推論（特に演繹的な推論）ができるようになり、論理的な思考力を伸ばすための重要な学習の機会となる。そして第3学年では、第2学年に引き続き図形の学習を行うことによって、図形の性質について見通しをもって論理的に考察し表現できるようになることをめざしていくことになる。

前単元（「図形の調べ方」）では、平行線や角の性質や三角形の合同、証明のしくみや進め方など、演繹的に考えて論理的に説明していくための基礎を学習してきた。そして本単元では、三角形の合同条件を用いて、三角形に関するいろいろな図形の性質や条件を考察し、図形についての理解を深めていくとともに、論理的に考察し表現する力を高めていくことがねらいである。「図形の性質を証明する」という学習が中心になるが、この学習というのは次に述べるような①～⑥の学習過程がある。

- | | |
|-------------------|---------------------------|
| ① 図形の性質などの命題をつくる。 | ④ 証明をかく。 |
| ② 命題を理解する。 | ⑤ 証明を読む。 |
| ③ 証明の方針をたてる。 | ⑥ 証明をふり返って、新しい図形の性質を見い出す。 |

ただ単にいくつもの証明ができるというのではなく、1つの証明問題から⑤、⑥の学習過程、さらには「問題の条件（仮定）を変えること」など、生徒が自ら発展的に追求していくような学習を展開していくことも大切であると考え。

(3) このように生徒の実態や本単元のねらいをふまえた上で、二等辺三角形や正三角形、直角三角形など三角形について、定義から定理を予想し、既習の学習を生かして証明していく学習に取り組んでいく。第1次では、「2つの底角が等しい」ことなど二等辺三角形の性質について学習し、その性質の証明に取り組む。「なぜ、そうなるのか。」という問いに対して、三角形の合同条件を用いて論理的に説明できることをめざしていきたい。また第2次では、二等辺三角形になる条件の証明や逆の意味について学習し、これらをもとに正三角形の性質や条件について考えていく。ここでは、二等辺三角形や正三角形の図を用いて説明することや仮定や結論、逆といった数学的用語を適切に用いて表現できることをめざし、まわりの友だちに説明したり、説明を聞いたりする学習活動を取り入れていく。第3次では、二等辺三角形や正三角形の図から、等しい辺や角の関係を見つけて証明するだけでなく、1つの証明問題から発展的に追求する学習場面をつくっていく。第4次では、直角三角形の合同条件を利用して、直角三角形を含むいろいろな図形の性質を証明することで、論理的に考察し表現する力をさらに高めていきたい。

本時（第3次7時）では、隣り合う2つの正三角形の図から、等しい辺の関係を見つけ証明するだけでなく、⑤、⑥の学習過程、さらには「問題の条件を変えても等しい角の関係が保たれるかどうか」などについて追求させていきたい。まず前時に取り組んだ「2つの正三角形ABC、DCEが、頂点Cを共有しているとき、AE=BDである。」ことの証明を読むことから、合同であることの根拠として用いられていない図の中の角の関係を見直したり、さらに正三角形DCEの大きさや位置が変わっても、常に合同が成り立ち、対応する角の大きさも等しくなることを確認する。そしてこの図から、さらに新たな性質を見だし追求していくことをめざしていく。具体的には「AEとBDとの交点をPとし、交

点Pの性質を追求しよう。」という課題を設定し、「 $\angle APB$ や $\angle DPE$ の大きさが 60° になりそうだ。」
 「正三角形DCEの大きさや位置を変えると、 $\angle DPE$ の大きさはどうなるだろうか。」「正三角形DCEの大きさや位置を変えると、交点Pの位置はどのように変わっていくのか。」といった交点Pに注目することによって生まれた数学的な「問い」を、できるだけ生徒の思考にそった形で、また自分で調べたいいろいろな場合の図をまわりの友だちや学級全体場で説明し合うことを通して、追求させていきたい。

3 展開計画（全9時間 本時7/9）

次	主な学習	時	具体的な学習・内容、(◇印は学級全体での学び合いの場面)
1	二等辺三角形の性質を証明しよう	1 2	・二等辺三角形の性質を見つけ、三角形の合同条件を使って証明する。
2	二等辺三角形や正三角形になるための条件は？	3 4	・三角形の合同条件を使って、二等辺三角形になる条件を証明する。 ◇正三角形の性質や正三角形になるための条件を考える。
3	二等辺三角形や隣り合う2つの正三角形の図から図形のもつ性質を追求しよう	5 6 ⑦	・二等辺三角形の図から等しい辺の関係を見つけ、証明する。 ◇問題の条件を変えても、等しい辺の関係が保たれるかどうか考える。 ・隣り合う2つの正三角形の図から等しい辺の関係を見つけ、証明する。 ◇問題の条件（大きさや位置）を変えても、等しい辺の関係が保たれるかどうかを考える。 ⑦ ・隣り合う2つの正三角形の証明を読んで、新たな性質を見つける。 ◇問題の条件（大きさや位置）を変えても、等しい角の関係が保たれるかどうかを考える。
4	直角三角形が合同になる条件は？	8 9	・直角三角形の合同条件を考える。 ・直角三角形の合同条件を利用して、図形のもつ性質を証明する。

4 評価計画

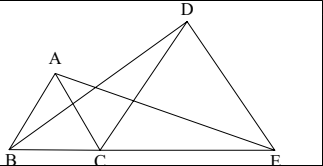
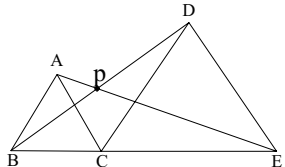
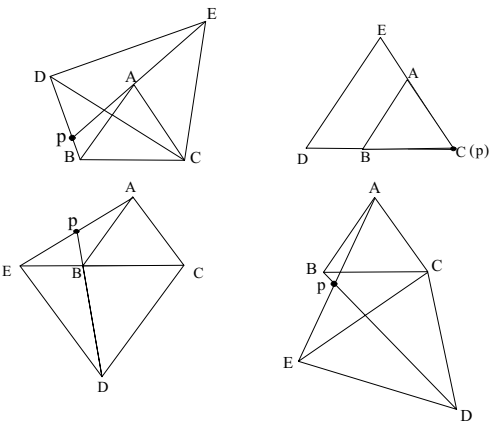
次	時	数学への 関心・意欲・態度	数学的な 見方や考え方	数学的な技能	数量や図形などについての知識・理解
1	1 2	二等辺三角形の性質を見つけ、その性質を証明しようとしている。	線分や角の等しい関係を証明するために必要な合同な三角形を見だし、証明を考えている。	三角形の合同条件や既習の図形の性質などを根拠として、二等辺三角形の性質を証明している。	二等辺三角形の定義や性質を理解している。
2	3 4	二等辺三角形や正三角形になる条件を、証明しようとしている。	命題の逆を吟味して、正しいかどうかを判断している。	三角形の合同条件を用いて、二等辺三角形になるための条件を証明している。	二等辺三角形や正三角形になるための条件や逆の意味を理解している。
3	5 6 ⑦	二等辺三角形や隣り合う2つの正三角形の図から、線分や角の等しい関係を見つけようとしている。	1つの証明から、新たな性質を見つけたり、問題の条件を変えても等しい関係が保たれるかどうかを考えている。	二等辺三角形や隣り合う2つの正三角形の図から、線分や角の等しい関係を証明している。	三角形の合同条件を用いた証明の意味を理解している。
4	8 9	直角三角形の合同条件を使って証明しようとしている。	直角三角形の性質を理解し、その合同条件を考えている。	直角三角形の合同条件を用いて証明している。	直角三角形の合同条件を理解している。

5 本時の学習

(1) ねらい

隣り合う2つの正三角形の証明問題を読むことから、図形のもつ新たな性質を見つけだし、問題の条件(大きさや位置)を変えたときも常に一定になることについて追求することができる。

(2) 展開

学習場面と子どもの取り組み	教師の支援と願い・評価(◎は学び合いのためのはたらきかけ)
<p>1. 前時の課題をふり返る。</p> <p>右の図のように、「2つの正三角形ABC, DCEが、頂点Cを共有しているとき、$AE = BD$である。」ことの証明をふり返ろう。</p>	
<p>◎ $\triangle ACE \equiv \triangle BCD$であることを根拠に、$AE = BD$の他にどんなことがいえるか。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ $\angle CAE = \angle CBD$ ・ $\angle AEC = \angle BDC$ <p>◎ 正三角形DCEの大きさや位置が変わっても、これらのことは成り立つのか。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ どの場合も、$\triangle ACE \equiv \triangle BCD$を証明できるから、対応する角の大きさは等しいのでいえる。 	<p>・ 前時に取り組んだ証明を読ませることから、合同な図形の性質より対応する角の大きさが等しいことを確認する。</p> <p>◎ 各自で取り組んだいろいろな場合の証明をふり返り、これらの証明にはどのような違いや共通点があるのかについても考えさせる。</p> 
<p>AEとBDとの交点をPとし、交点Pの性質を追求しよう。</p>	
<p>◎ $\angle DPE$の大きさについて考える。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ $\triangle ACE \equiv \triangle BCD$より、対応する角は等しいことから$60^\circ$になる。 ・ $\triangle ACE$を点Cを中心に60°回転移動すると$\triangle BCD$になるから、常に60°になる。 	<p>・ 各自で作図させることによって、課題を明確にする。</p>
<p>$\triangle DCE$の大きさや位置を変えると、$\angle DPE$の大きさはどうなるだろうか。</p>	
<p>◎ いくつかの場合の図をかき、$\angle DPE$の大きさについて考えていく。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ 常に$\angle DPE$は60°になりそうだ。 	<p>◎ 点Aが$\triangle DCE$の内部にある場合や辺CE上にある場合など、いろいろな場合について調べることができるよう$\triangle DCE$の作図する位置を工夫させる。</p>
	<p>◎ $\angle DPE$の求め方を説明できるよう、図の中に印をつけたり、考えをメモするなど整理させておく。</p> <p>◎ 各自で調べたいいろいろな場合の図を友だちと説明し比較し合うことで、どんな場合についても成り立つかどうかを考えさせていく。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p style="text-align: center;">— 評価の観点(数学的な見方や考え方) —</p> <p>$\angle DPE$の大きさについて、いくつかの場合を比較しながら、常に60°になることを明らかにしている。【評価方法 発表・ワークシート】</p> </div>
<p>◎ $\triangle DCE$の大きさや位置を変えると、交点Pの位置はどのように変わっていくのか。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ $\triangle ABC$の3つの頂点を通る円周上にありそうだ。 <p>3. 本時の学習内容をふり返る。</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・ PCソフトを活用することで、交点Pの軌跡に気づけるようにする。