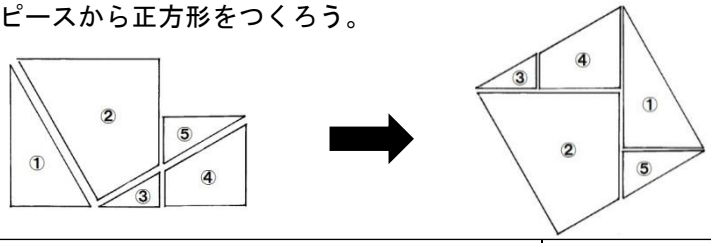
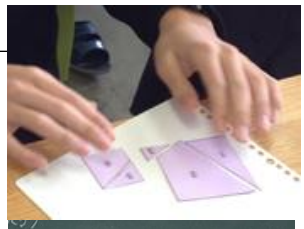
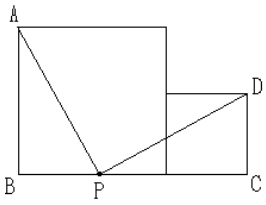
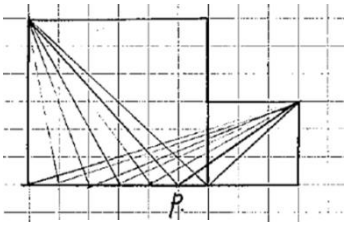
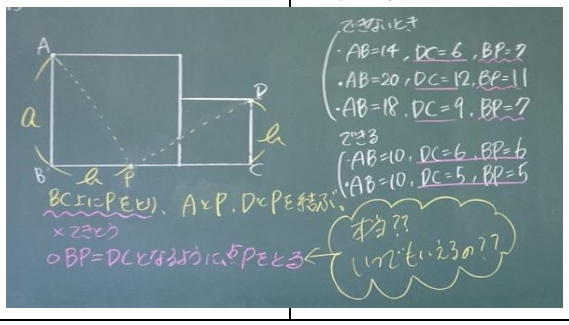
算数・数学部実践②　中学校　第３学年　「三平方の定理」　１４時間

目標　観察，操作や実験などの活動を通して，三平方の定理を見いだして理解し，それを用いて考察したり，活用したりすることができるようにする。

時	学習活動の概要	指導上の留意点
①	（ねらい）　５つのピースから正方形を作る活動を行い，２つの小さい正方形から１つの大きな正方形ができることに気付き，２つの小さな正方形から１つの大きな正方形を作るパズルの切り方の秘密を探る。	
	・５つのピースから正方形を作る活動を行い，２つの小さい正方形から１つの大きな正方形ができることに気付き，三平方の定理に興味をもてるようにする。	○実際にパズルを操作することを通して，２つの正方形から１つの正方形ができていることを視覚的に分かるようにする。
	５つのピースから正方形をつくろう。  	
	「①②③と④⑤で正方形が２つできる」 「全部のピースを使って，もっと大きな正方形を作れないかな」 「①を平行移動して，⑤の上にもっていく。③と④も平行移動で②の上にもっていくと１つの大きな正方形になる」 **問いの発生** 「どんな２つの正方形からでも，このパズルはできるのかな」 「どこを直角にするかがポイントだから，切り方に決まりがあるのかな」 **問題の設定**	○柔軟な考えができるように，友達と相談しながら考えたり，友達に聞いたり，説明したりする時間を大切にする。 ○「どうやったら大きな正方形ができたのか」と問いかけ，どのように図形を移動させたのかに注目できるようにする。 **POINT　1** **具体物を使って考えるとわかりやすい！**
	正方形を２つ並べ２回切る方法は，どんな２つの正方形の場合でも１つの大きな正方形が作ることができるのか調べよう。	
	解決の計画 「２つの正方形の大きさを変えてやってみよう」 「点Ｐの位置に決まりがあるか見つけるために点Ｐの位置を変えてやってみよう」  	○共通の視点で議論ができるように正方形を２つ並べて，点Ａと点Ｄを通るように２回切ることを切り方の約束とする。 ○「いつでもいえるのか」という問いが生まれるように，正方形の大きさや点Ｐの位置を自由に決めることができるようにする。
	 生徒のノート	 ← 具体的な数値から，BP＝DC を見付けていく場面

「どんな２つの正方形でもできそうだ」
「正方形にするためには，∠APD が９０°になるように点Ｐをとる必要がある」
「AP＝ＰD になるように点Ｐをとりたい」
「BP＝DC となるように点Ｐをとればよい」

計画の実行

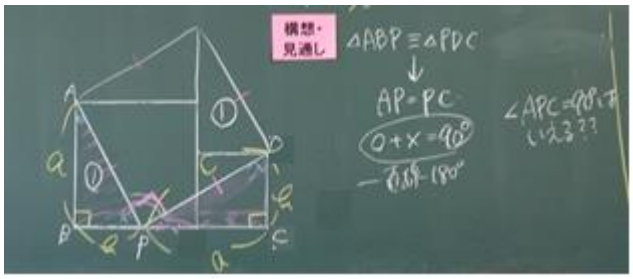
②

（ねらい）　BP＝DC となるようにすれば，本当に大きな正方形を作ることができるのかについての構想・見通しを立てる。

「正方形はどうやったら言えるのかな」
「△ABP と△PCD の合同が言えそうだけど，条件が１つ足りない。たぶん，AP＝PC がいえると思うけど，どうやったら言えるのが分からない」

○一人一人が考えをもつことができるように，証明は書くことを目的とせず，図を使って見通し・構想を立てる時間を大切にする。

大きな正方形というために，△ABP≡△PCD と，∠APD＝90°になることを証明しよう。



「大きな正方形を証明するために，合同の証明や正方形の性質などを使いました。２年生で習ったことをフルに使って考えることができました。」
「正方形を言うために AP＝PD をいうことまでは分かっていたけど，90°の説明が分かりませんでした。でも，○○さんの説明を聞いて，すごくよく分かりました。記号を使って説明されたのが分かりやすかったので，私もあんな風に説明できるようになりたいです。」

POINT　2
人に分かりやすく
説明できるようになりたい！！

③

（ねらい）　三平方の定理を知り，２つの正方形と新しくできた大きな正方形の面積の関係が，直角三角形のときだけにしか成り立たないことを確かめる。

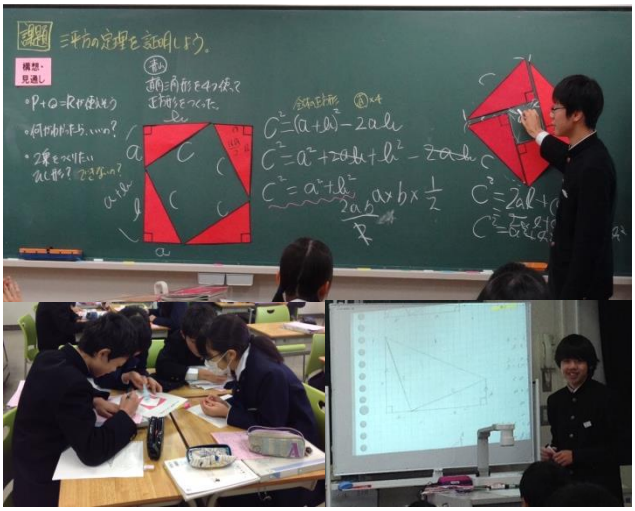
「正方形には面積の関係だけでなくて，辺にも関係がありそう」
「３つの正方形の１辺から三角形ができた」
「どんな三角形でも三平方の定理は成り立つのか調べてみたい」

○周りにできる正方形の面積と中にできる直角三角形の辺の関係から，三平方の定理に気付けるようにする。
○三角形の周りにできる正方形を Ｐ，Ｑ，Ｒとすることを確認する。

どんな三角形でも，Ｐ＋Ｑ＝Ｒが成り立つのか調べよう。

「三平方の定理を知り，どんなときに使われて，どんな風に便利になるのか楽しみです。たぶん，斜めの

○面積を確認する際に，既習事項である平方根で扱った面積の求め方を確認し，多

	線の長さが求められるようになるから，僕の世界が広がりそうです。」 「外の正方形を変えて三角形にしたり，中の三角形を四角形に変えたりしたら，どんな定理ができるのか調べてみたいです。」 「直角ならば三平方の定理が言えることがわかりました。正三角形や二等辺三角形など直角がないときは，どんな関係があるのかなと思いました。」	様な視点で議論できるようにする。 ○いろいろな三角形を扱うことで，直角三角形しか成り立たないことを確認する。 ○「いつでも成り立つのか」という問いかけから，文字を使っての三平方の定理の証明につなげる。
④ ⑤	（ねらい）　既習事項を使って，三平方の定理を証明するための構想・見通しを立てる。	
	「かいて確かめただけなので，もう少し数学的に考えてみたいと思いました。」 「ピタゴラスが見つけた P＋Q＝R の式について考えました。直角三角形ならいえることを証明できないのかなと思いました。」	○前時の振り返りを紹介し，多くの偉人たちが魅せられた定理であることを伝え，自分も証明してみたいという気持ちが芽生えるようにする。
	三平方の定理$a^2+b^2=c^2$を証明しよう。	
	・証明するための構想・見通しを立てる。  	○仮定と結論を確認する。 ○「文字を使って何を証明するのか」「何が言えれば証明できるのか」などと問いかけ，１つの直角三角形だけでは証明できないことに気付けるようにする。 ○「その式は図のどこを表しているのか」「なぜそれがいえるのか」「どういうことに注目したから証明ができたのか」など，より数学的に考えたり説明したりできるような視点を投げかけ，図と式を定式化する。 POINT　3 習ったことを使えば， 説明できる!!
⑥	（ねらい）　三平方の定理の逆が成り立つことを理解し，三角形が直角三角形かどうか判断することができる。	
	・AB＝５cm，BC＝４cm，CA＝３cm の△ABC をかき，どんな三角形になるのか考える。 ・直角三角形かどうか判断する問題に取り組む。	○直接証明法ではない間接証明法である同一法を知る機会とし，証明の流れを確認しながら進める。
⑦ ⑧	（ねらい）　直角三角形をつくり，三平方の定理を利用していろいろな長さを求める。	
	・１辺の長さが 10cm の正三角形 ABC の面積の求め方について考える。 ・面積を求めるために引いた補助線（高さ）から，90°，60°，30°の三角形（三角定規の１つ）に注目し，２つの三角定規の３辺の長さの比について考える。 ・$\sqrt{2},\sqrt{3}$ などを表す点の位置を求める方法を考える。	○補助線などを加えることで直角三角形を生徒が発見できる場面を大切にする。
⑨	（ねらい）　三平方の定理を利用して，平面や空間のいろいろな長さを求めることができる。	
	・円の弦の長さや接線の長さ，座標平面上の２点間の距離などの求め方を考える。 ・直方体の対角線の長さ，正四角錐の体積などの求め方を考える。	

⑩	（ねらい）　三平方の定理を使用して，富士山の頂上から見渡せる範囲について調べる。	
	・富士山の頂上から見渡せる範囲を予想し，地球を球と考え，実際に見渡せる範囲を調べる。	○イメージしやすいように，地図や地球儀，電卓などを用意する。
⑪ ⑫	（ねらい）　レポートを作成し，三平方の定理についてのよさを見つけるる。	
	・今まで学習した三平方の定理について自分の興味のあることについて調べ，レポートにまとめる。 ・レポート発表会を行う。	○自分のふりかえりを参考に，授業でまなんだことをまとめたり，もっと知りたいことを調べたり，自分でテーマを設定してレポートを書くように伝える。 POINT　4 三平方の定理は 奥が深い！！
⑬ ⑭	（ねらい）　練習問題やテストを行い，三平方の定理の理解を確認する。	
	・練習問題に取り組む。 ・ワークテストを行う。	

～ポイント解説～

POINT　1　具体物を使って考えるとわかりやすい！⇒観察や操作，実験などの活動を通して三平方の定理を見いだすことにつなげる。

本単元の導入では，まず５つのピースから正方形を作る活動を行った。２つの正方形を作ることは容易で，多くの生徒がすぐに作ることができた。できた生徒には「もっと大きな正方形はつくれないのかな」と問いかけると，「全部のピースを使って１つの正方形を作るってことですね」と答え，５つのピースをすべて使って大きな正方形を作ることに挑戦していった。「どうやったら大きな正方形ができたのか」と問いかけ，どのように図形を移動させたのかに注目できるようにすることで，次のパズルの切り方を探る活動につなげることができた。パズルを操作する中で，③と④のピースと①のピースが合同であること，②のピースに 90°の角が２つあることなどに気付いている生徒がいた。このことは，次に行うパズルの切り方を探る活動の際に必要となる視点である。

図１　パズルを操作する様子

パズルの切り方を探る活動では，生徒の多くは実際に自分で正方形の大きさや点Ｐの位置を決め，オリジナルのパズルをつくった。そこから正方形ができた場合とできなかった場合の具体的な数値から BP＝DC の関係を見つけることができた。

パズルを使うことで視覚的に２つの正方形から１つの大きな正方形ができる面積の関係を理解した上で，それぞれの正方形の面積を P，Q，R とし，面積の関係を P＋Q＝R という式で表すことで，「面積の関係だけでなく，辺にも何か関係がありそう」と気付く生徒がいた。パズルの操作から三角形の３辺の長さについての観察につながり，生徒自身が三平方の定理を見いだすことができたと実感した。しかし，中には「パズルでは本当にいえたか分からない」「いつでもいえるのか証明したい」と感じる生徒

もおり，その気持ちを大切にしながら三平方の定理の一般化や証明につなげていった。

以下は生徒のふりかえりである。

○今日は正方形のパズルを使って学習しました。パズルを闇雲にするのではなく，移動に注目するとパズルは完成させやすかったです。２つの正方形と大きな正方形の面積が等しいことが分かったので，それがどんな風に次の勉強につながるのか，どんなきまりを習うのか楽しみです。

○パズルのピースの中には，合同や相似になる三角形がいくつかありました。そこにも何か秘密はあるのか，次の学習が楽しみです。

POINT　２　文字を使うと，分かりやすい！！
⇒数学的な表現を用いて事象を簡潔・明瞭・的確に表現する力を育成する。

昨年度行った数学の授業に関する調査から，「人に分かりやすく説明できるようになりたい」と思っている生徒がほとんどであることがわかった。また，そのために必要なこととして「一人でじっくり考える時間がほしい」，「一人では思いつかないから友達と相談しながら考えたい」など，思考する場面の形態への要望は様々であった。そこで，課題を思考する場面では，自由に考える形態をとるようにした（図２）。生徒たちは，図２のように個人で考えたり，３人や班になって相談したりする。初めは個人で考える生徒が多いが，「分かった」，「分からない」などの声で，だんだん複数人で話し合うグループが増えていく。このような姿から，生徒の「分かりたい」「分かったら伝えたい」という気持ちを強く感じた。

図２　自由な形態で思考する場面

学級全体で考えを共有する場面では，まずは「解決できなかったこと」「わからないこと」などを初めに取り上げた。生徒からは，「∠APD＝90°になる理由がわからない」，「AP＝PD になると思うけど，それをどうやったら証明できるのかわからない」の２つが出た。∠APD＝90°に関しては，前時のパズルの操作で説明した生徒に対して，「それではいつでもいえない」という意見があった。そこで，○や△などの記号を使った説明でどんな正方形でも証明できることを確認していった（図３）。AP＝PD に関しては，図を使って説明する生徒（図４）と式を使って説明する生徒（図５）がいた。このような生徒が説明する場面を繰り返すことが，数学的な表現を用いて事象を簡潔・明瞭・的確に表現する力を育成することにつながると考える。

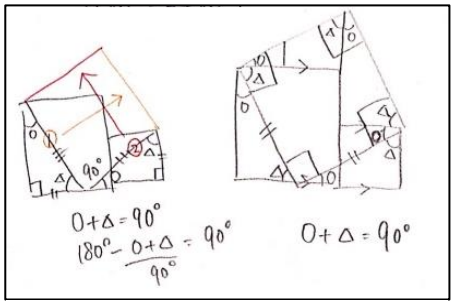


図３　生徒のノート

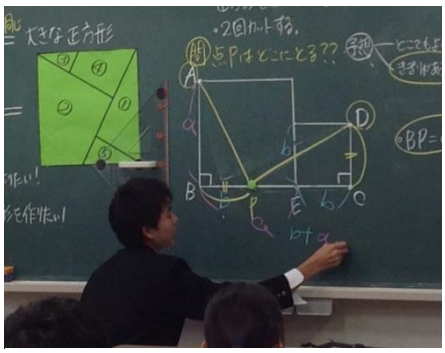


図４　図を使って説明する生徒

以下は生徒のふりかえりである。

○図の中に分かったことを書き込んでいくと，証明の見通しや構想が立てやすいと改めて思いました。また，図だけでなくて，式変形からも等しいことがいえることもこれから利用したいと思いました。

○正方形であることを証明するために AP＝PD をいうことまでは分かっていたけど，90°の説明が分かりませんでした。でも，○○

図５　式を使って説明する生徒

さんの説明を聞いて，すごくよく分かりました。記号を使って説明されたのが分かりやすかったので，私もあんな風に説明できるようになりたいです。

POINT　3　習ったことを使えば，説明できる!!
⇒既習の内容を基にして，図形の性質を見いだし，統合的・発展的に考察する力を育成する。

第４，５時では，三平方の定理の証明を考える活動を行った。まず，「文字を使って何を証明するのか」「何が言えれば証明できるのか」などと問いかけ，仮定と結論を確認した。その後，生徒たちは，前時までに使っていたパズルを操作しながら考えたり，前時で使った図を使ったりしながら考えていった。「直角三角形を４つ使って正方形をつくれば証明できそう」という生徒の発言から，多くの生徒が２種類の正方形をつくって証明を考えていった（図６）。

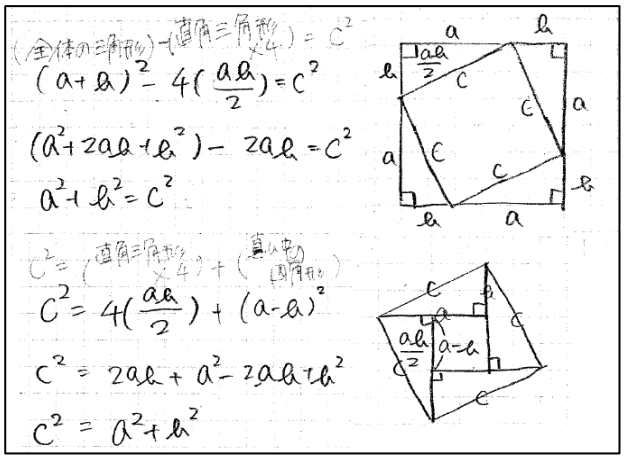


図６　生徒のノート（正方形を用いた証明）

次に，「補助線を引けば，直角三角形１つで証明できる」という生徒の発言から，１つの直角三角形での証明に取り組んでいった。「相似な三角形ができる」，「相似比を使って証明すればできる」など学級全体で意見を出し合いながら解決していった（図７）。

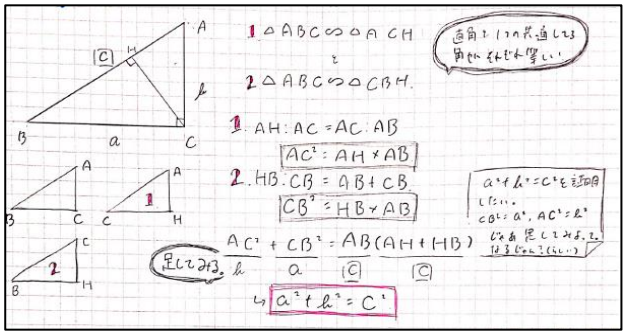


図７　生徒のノート（相似を使った証明）

以下は生徒のふりかえりである。

○最初の２つの証明は，C^2 の正方形の面積を使ってやっていくところが似ていると思いました。１つの直角三角形でやる証明を考えたいです。

○相似を使って証明するのはすごいと思いました。面積比を使っても，もっと簡単に証明できると思うので，レポートでみんなに紹介します。習ったことを使っていくと，スッキリ証明できるので，数学はつながっているなと思いました。

POINT　4　三平方の定理は奥が深い！！

これまで学習したことを深めること，また学習過程での疑問や新たな問いを解決することをねらい，三平方の定理に関するレポートを作成した。レポートのテーマは，三平方の定理を学習して，自分が興味をもったことをさらに追究する内容とした。「三平方の定理の証明」として授業で扱った証明やさらに調べてわかった証明をまとめるレポートや，「高い建物や山から見渡せる距離」として様々な建物や山などから見渡せる距離を調べているレポートがあった。図８は，生徒が作成したレポートである。

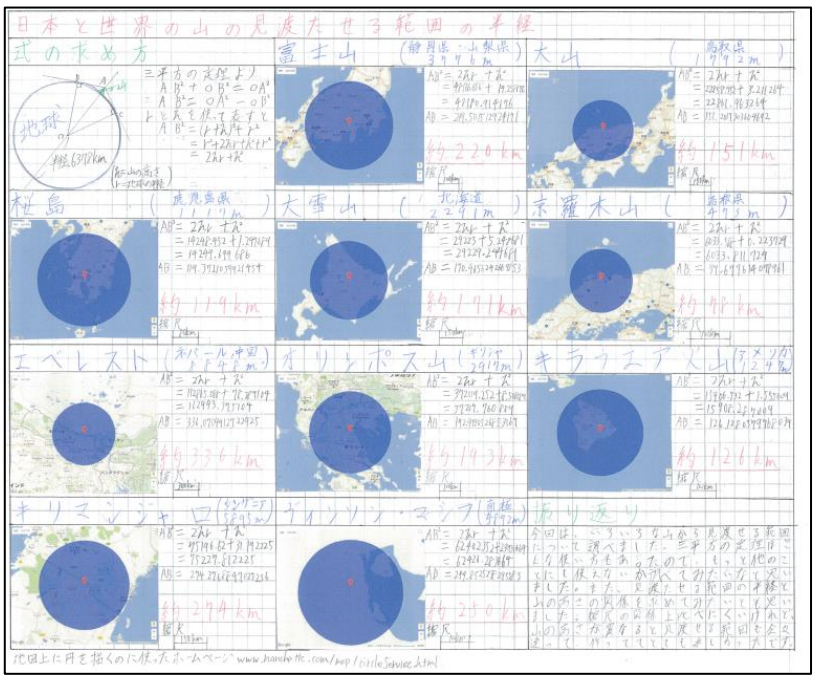


図８　生徒が作成したレポート

成果と課題：教科構想に基づいて本実践を振り返る

「深い学び」を実現する場の追究として，算数・数学部では「題材の設定」「子どもたちの思考をつなぐためのはたらきかけ」「学びの自覚を促す活動」を手立てとしてあげている。

「題材の設定」においては，三平方の定理にまつわる歴史的な背景や逸話の紹介などを通して，生徒の興味・関心を引き起こす工夫をした。またパズルを使って，操作をしながら視覚的に面積の関係に注目できるようにした。直角三角形の周りにできる正方形の面積の関係に着目し，三角形の３辺の長さについての観察を通して，生徒自身が三平方の定理を見いだすことができる実践を行うことができたと感じている。偉人たちが魅了された 100 種類以上もある三平方の定理の証明を自分も証明したいという気持ちや，自分の力で証明することを通して達成感を味わうことができたというふりかえりもあった。ただ単に様々な図形の性質を証明することの延長として三平方の定理を扱うのではなく，いろいろな三角形を扱うことで直角三角形だからこそ成り立つ関係の美しさに触れたり，発見する楽しさを味わったりすることができたと思っている。また，今まで求めることができなかった長さを，平面図形や空間図形の中に直角三角形を見いだすことで求める喜びを感じられた生徒も多くいた。

「子どもたちの思考をつなぐためのはたらきかけ」においては，証明する前に，「証明するためにはどうすればよいか」と構想・見通しを立てる時間を設定した。そうすることで，「文字を使って何を証明するのか」「何が言えれば証明できるのか」など数学的な問題を解決するための構想力をはぐくむことができた。また，図と式を結合的に考えることができるように，「その式は図のどこを表しているのか」「なぜそれがいえるのか」「どういうことに注目したから証明ができたのか」など，より数学的に考えたり説明したりできるような視点を投げかけるはたらきかけを行った。さらに，班で考えたり，全体で共有したりする時間を設定することで，自分自身の考えを言語化する姿や，自分の考えと友達の考えを組み合わせてよりよい考えを作る姿を見ることができた。

「学びの自覚を促す活動」においては，「本時の学習で一番大事だと思うこと」，「分からなかったこと」，「もっと知りたいこと」などふりかえを書く視点を焦点化し，授業の最後に生徒のふりかえりを発表する場面を設定した。そうすることで，生徒自身が 1 時間の学習を振り返り，次の時間への見通しをもつことにつながったと感じている。授業後の休憩時間に，疑問を解決したり，さらに追究しようとしたりする姿も見られた（図９）。また，生徒のふりかえりから次の時間の課題を設定する機会を多く取り入れた。それにより，様々な場面で「問題発見・解決のための学習過程」のサイクルを，生徒自身が自ら行うことができるようになると考えている。

図９　授業後の休憩時間の様子

算数・数学部で育成を目指す「事象を数理的に捉え，問題を自立的に，協動的に解決する算数・数学学習」を行うために，こうした手立ては有効であると感じた。また，このような手立てのある授業を単発で終えるのではなく，繰り返し行うことが大切であると考えた。生徒自身が自ら日常生活や社会の事象を数理的に捉え，数学的に処理したり，数学の事象について統合的・発展的に考えたりして，問題を解決することができるような授業作りを今後も続けていきたい。

（大谷　由香）

事象を数理的に捉え，問題を自立的，協働的に解決する内容構成

今年度は，公開研究会（平成２９年１１月），数学授業づくり研修会（平成３０年２月）でそれぞれ平面図形の面積と三平方の定理，場合の数を基にして得られる確率の授業づくりに取り組んだ。子どもが問題を自立的，協働的に解決できるようになるために，算数・数学の教師に求められる専門性として面積，確率に存在する論理的な背景とそれらに関連する公理主義的な見方・考え方を述べる。

１．面積，確率とルベーグ測度

小学校第４学年で学習する集合の面積は，論理的には二重積分で定義される。積分と言えば高等学校数学Ⅱで学習する直線や関数のグラフで囲まれた図形の面積を思い出す読者もいると思われるが，それは二重積分からフビニの定理を経由して導出された公式である。このように，集合の面積の性質は二重積分から導出されるが，算数・数学の教師が理解すべき性質として次の（１），（２）がある。

（１）空集合の面積は，０である。
（２）<u>有限加法性</u>：互いに素な二つの集合の和の面積は，それぞれの集合の面積の和である。

平面図形の面積と三平方の定理の授業は，有限加法性を見出し，統合的・発展的に考える力（小学校第４学年）やそれを活用して論理的に考察する力（中学校第３学年）を身につける活動と言える。面積だけでなく確率にも，高等学校数学Ａで学習する確率の基本性質から分かるように，有限加法性があることに注意されたい。現代数学では面積，確率をルベーグ測度で議論するのが一般的である。

２．公理主義的な見方・考え方

広さ，起こりやすさでそれぞれ定義される面積，確率と対照的に，ルベーグ測度は先の（１），（２）の拡張を満たす集合関数（集合を入力して実数または無限大を出力する関数）で定義される。ルベーグ測度のように，数学的な対象を論理記号と数学記号のみで定義して議論する形式を日本では公理主義と呼ぶ。算数・数学科の教科書を読む限り，日本の算数・数学教育に公理主義が浸透しているとはとても言えないが，単元の終盤に公理主義的な見方・考え方を身につける活動は導入できる。例えば，中学校第１学年で学習する正の数と負の数は，論理的には体や線型空間で議論される。体や線型空間の定義を踏まえ，四則計算の法則を過不足無くまとめる活動を導入すれば，子どもに公理主義的な見方・考え方が身につくと期待される。過不足無いか否かは，教師が体や線型空間の定義から評価できる。

公理主義は現代数学の常識であり，論理記号と数学記号に対する慣れを必要とするが，それらのみで議論するため，公理主義には自己・他者の主観から独立して議論できるという良さがある。自己・他者の主観から独立して議論できれば，子どもが問題を対自己，対他者からそれぞれ自立的，協働的に解決できるようになると期待される。公理主義への第一歩として，言語活動の充実を目指したい。

（共同研究者：島根大学教育学部数理基礎教育講座，柿澤亮平）

参考文献

［１］伊藤清三，ルベーグ積分入門（数学選書），裳華房，1963 年.
［２］松坂和夫，集合・位相入門，岩波書店，1968 年.